Die folgenden 8 Aufgaben sind Multiple Choice Aufgaben. *Zur Erinnerung: Jede MC-Aufgabe besteht aus drei Teilen, die jeweils mit richtig oder falsch beantwortet werden können. Eine richtige Antwort gibt **2** Punkte, eine falsche Antwort **-2** Punkte. Jedoch können pro Aufgabe nie weniger als 0 Punkte erzielt werden. Damit ist jede MC-Aufgabe zwischen 0 und 6 Punkten wert.*

---

1. Welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren?

(a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\log(x)}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \log(x)^2\,\mathrm{d}x$

2. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 1$. Welche der folgenden Funktionen sind Tangenten an f?

(a) $x \mapsto -x + 1$

(b) $x \mapsto \sqrt{7}x - 3$

(c) $x \mapsto -4x - 8$

3. Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen. Es sei $b_1, b_2, \ldots$ eine weitere Folge reeller Zahlen, definiert durch $b_1 = a_1$ und $b_n = a_n - a_{n-1}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese richtig oder falsch ist.

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Falls die Folge b_n konvergiert, so konvergiert auch die Folge a_n.

(c) Falls a_n beschränkt und monoton steigend ist, so ist b_n eine Nullfolge.

4. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese richtig oder falsch ist.

(a) Ist f nicht injektiv, so existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.

(b) Falls ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$ existiert, so ist f nicht injektiv.

(c) Falls eine Umkehrfunktion von f existiert, so ist diese differenzierbar.

5. Welche der folgenden Funktionen sind Asymptoten der Funktion $x \mapsto \sqrt{x+900}$ für $x \to \infty$?

(a) $x \mapsto \sqrt{x}$

(b) $x \mapsto \sqrt{x} + 30$

(c) $x \mapsto \sqrt{x+30}$

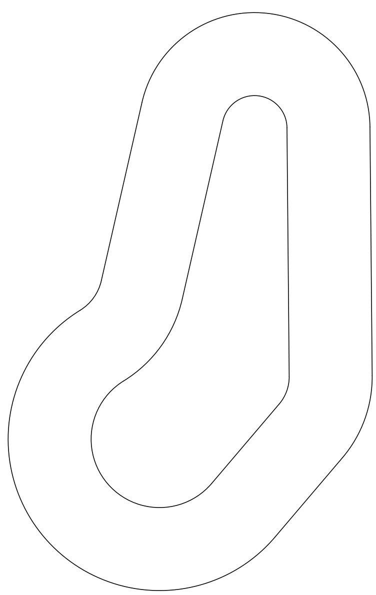
6. Betrachten Sie die unten links abgedruckte Rennbahn. Sie sitzen in einem Auto und legen im Uhrzeigersinn eine Runde auf dieser Rennbahn zurück, wobei Ihr Bahnverlauf fortwährend auf dem Asphalt aufgemalt wird, wie im rechten unteren Bild veranschaulicht. Aus Gründen der Abstraktion nehmen wir an, dass der Bahnverlauf immer durch eine geschlossene Kurve gegeben ist. Ist es für Sie möglich, die Runde derart zu absolvieren, dass die Krümmung des aufgemalten Bahnverlaufs

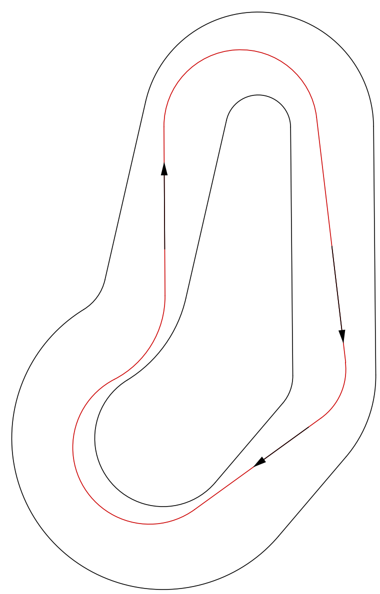
(a) ... auf zumindest 80 Prozent der Strecke gleich 0 ist?

(b) ... immer dasselbe Vorzeichen hat?

(c) ... konstant ist?

[Für jede der drei Fragen kann ein eigener Bahnverlauf gewählt werden.]





7. Welche der unendlichen Summen konvergieren?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1.01^n}$

8. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kurve in der Ebene und $l(\mathcal{C})$ deren Bogenlänge. Weiters seien $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, und $\delta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $s \mapsto (\delta_1(s), \delta_2(s))$, zwei Parametrisierungen von $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese richtig oder falsch ist.

(a) Es gilt

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{\gamma_1}(t)^2 + \dot{\gamma_2}(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{\dot{\delta_1}(s)^2 + \dot{\delta_2}(s)^2}\,\mathrm{d}s.$$

(b) Der Teilweg $\tilde{\gamma} : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ für $0 \leq t \leq 1/2$, hat die halbe Bogenlänge von γ.

(c) Zu jedem $t \in [0,1]$ gibt es ein $s \in [0,1]$, sodass $\gamma(t) = \delta(s)$.

[Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ ist durch

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

gegeben.]

Die folgenden 18 Aufgaben sind Single Choice Aufgaben. *Zur Erinnerung: In jeder SC-Aufgabe gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Eine richtige Antwort gibt **3** Punkte. Es gibt keine Abzüge für falsche Antworten, raten lohnt sich daher!*

---

9. Es sei $\gamma\colon [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve in der Ebene, gegeben durch $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, wobei

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{1 - \sinh(u)^2}\,\mathrm{d}u, \quad y(t) = \cosh(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq \log(2).$$

Berechnen Sie die Oberfläche, die bei einer Rotation von γ um die x-Achse entsteht.

(a) $3\pi/2$

(b) 2π

(c) $5\pi/2$

[Die Oberfläche, die bei einer Rotation der Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ um die x-Achse entsteht ist durch

$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

gegeben.]

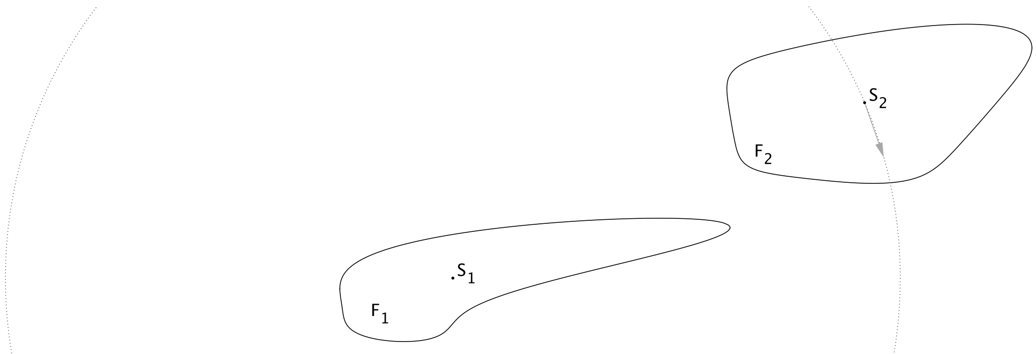
10. In welcher Menge liegt der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x}$?

(a) $\{-\infty\} \cup (-\infty, -1]$

(b) $(-1, 1)$

(c) $[1, \infty) \cup \{\infty\}$

11. Betrachten Sie untenstehende Konfiguration, bestehend aus zwei Flächen F_1 und F_2. Wir bezeichnen mit S_1 den Schwerpunkt von F_1, mit S_2 den Schwerpunkt von F_2 und mit S den gemeinsamen Schwerpunkt von $F_1 \cup F_2$. Nun rotieren wir F_2 um F_1 derart, dass der Abstand zwischen S_2 und S_1 konstant bleibt. Welche Kurve beschreibt die Bewegung vom gemeinsamen Schwerpunkt S?



(a) Ein Kreis

(b) Eine Ellipse, die kein Kreis ist

(c) Die Kurve kann nicht hinreichend beschrieben werden

12. Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

(a) -1

(b) 2

(c) 4

13. Welches ist das grösstmögliche Intervall, auf dem die Reihe

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(2\sqrt{x}-4)^n}{2^n}$$

konvergiert?

(a) $(1, 9)$

(b) $(-2, 2)$

(c) $(1, 3)$

14. Ein *Deltoid* ist durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t),$$
$$y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t)$$

gegeben, wobei $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt und a eine Konstante ist. Welcher Ausdruck entspricht der Bogenlänge des Deltoids?

(a) $a\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

(b) $a\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{5 + 4\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

(c) $a\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{5 - 4\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

[Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ ist durch

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

gegeben. Weiters gilt $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ für alle reellen Zahlen a und b.]

15. Was ist die x-Koordinate des Schwerpunkts des Inneren der Halbellipse, gegeben durch

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \text{ für } x \geq 0\right\},$$

wobei a und b positive reelle Zahlen sind?

(a) $\frac{4a}{3\pi}$

(b) $\frac{ab}{3\pi}$

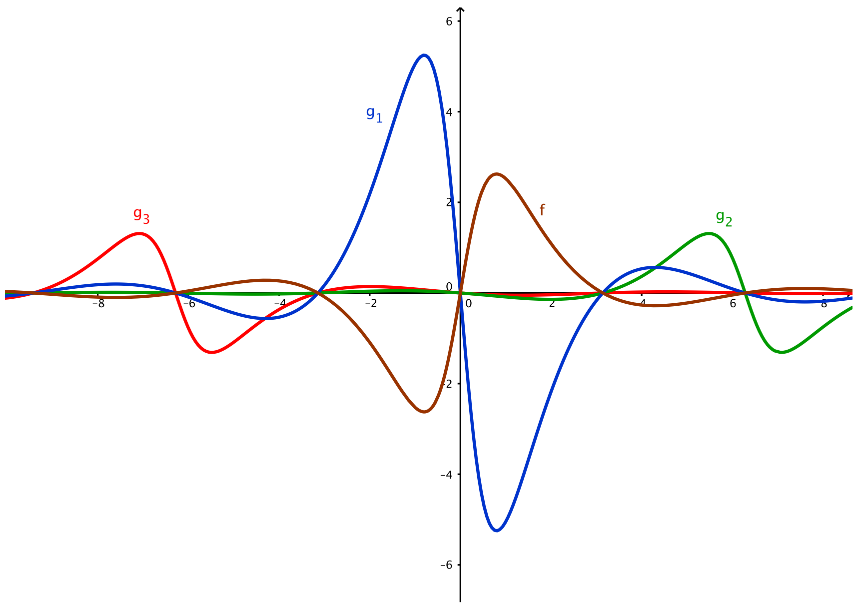
(c) $\frac{2a}{3\pi}$

[Die x-Koordinate des Schwerpunkts genügt der Gleichung

$$x_S \int G(x)\,\mathrm{d}x = \int xG(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $G(x)$ die y-Ausdehnung der Figur an der Stelle x ist. Weiters ist die Fläche der Ellipse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ durch πab gegeben.]

16. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = \frac{6\sin(x)}{x^2+1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Weiters sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{-3\sin(x+2\pi)}{(x+2\pi)^2+1}$ gegeben. Welcher der Graphen der Funktionen g_1, g_2 bzw. g_3 entspricht dem Graph der Funktion g in der nachstehenden Abbildung?



(a) g_1

(b) g_2

(c) g_3

17. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \frac{\cos(2x)+1}{\cos(x)}$. Welche der drei folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $2\cos x$

(b) $\cos 2x$

(c) $\sin x$

[Es gilt $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ *für alle reellen Zahlen* a *und* b*.]*

18. Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = x^{\sqrt{\log(x)}}$ und $g(x) = e^{\log^2(x)}$, definiert auf $[1, \infty)$. Kreuzen Sie die richtige Aussage an.

(a) $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$

(b) $g(x) = o(f(x))$ für $x \to \infty$

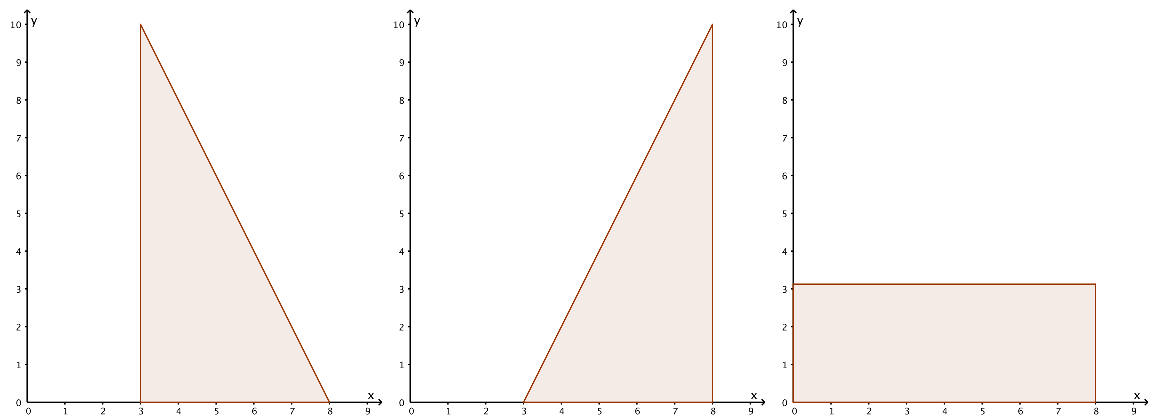
(c) $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ für $x \to \infty$

19. Welche der folgenden drei Flächen, die alle aus dem gleichen Material konstanter Dichte bestehen und gleich schwer sind, hat bei einer Rotation um die y-Achse das grösste Flächenträgheitsmoment?

(a) Die Linke

(b) Die Mittlere

(c) Die Rechte



20. Durch Berechnen der Taylorreihe von $x \mapsto e^{\sinh(x)}$ um $x = 0$ erhält man eine Potenzreihe der Form $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Welchen Wert hat a_2?

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 1

21. Welche geometrische Form hat die komplexe Region

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < |z - 2 - 3i|\}?$$

(a) Sie ist ein Kreis

(b) Sie ist ein Rechteck

(c) Sie ist eine Halbebene

22. Es sei p ein reelles Polynom vom Grad 10 mit $p(-i) = p(i) = p(2i) = p(3i) = 0$. Was ist die grösste Anzahl an reellen Nullstellen, die p haben kann?

(a) 2

(b) 4

(c) 6

23. Welcher Ausdruck entspricht dem unbestimmten Integral $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$?

(a) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$

(b) $\frac{1}{3}x^3 e^x + C$

(c) $\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1\right) e^x + C$

24. Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$, ist positiv. Die Region, begrenzt durch die x-Achse, die y-Achse und den Graphen von f wird um die y-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

(a) $\frac{11\pi}{6}$

(b) $\frac{11\pi}{12}$

(c) $\frac{11\pi}{15}$

[Tipp: Integrieren Sie eine geeignete Funktion bezüglich x.]

25. Betrachten Sie die Funktion $f\colon x \mapsto \int_0^x e^t \cos(t)\,\mathrm{d}t$. Auf welchem der folgenden Intervalle ist f konvex?

(a) $[\pi/4, \pi]$

(b) $[-\pi/2, \pi/4]$

(c) $[0, \pi/2]$

26. Es sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom sechsten Grades, definiert auf den gesamten reellen Zahlen (beispielsweise $p(x) = x^6 + 4x^4 + 3$). Wie viele lokale Maximalstellen kann p höchstens haben?

(a) 3

(b) 5

(c) 6